زوج مرتب :

هر دو تایی مرتب (a,b) که در آن a مؤلفه‌ی اول و b مؤلفه‌ی دوم است، را زوج مرتب می‌گوییم.

* تساوی دو زوج مرتب :

$$(a,b)=(c,d) \xrightarrow{\text{هرگاه}} \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

مثال: $x,y=?$ $\longrightarrow (x-2y,-1)=(-1,x+2y)$

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ x-2y=3 \end{cases} \Rightarrow 2x+2y=(-1)$$

$$2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$$

تابع $\longrightarrow$ محدودتر $\longrightarrow$ رابطه $\longrightarrow$ محدودتر $\longrightarrow$ حاصل ضرب دکارتی یا کارتزین $A\times B$

رابطه: فیلتر سنگین دارد

حاصل ضرب دکارتی: بدون فیلتر

حاصل ضرب دکارتی (کارتزین) $A\times B$:

مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی که مؤلفه‌ی اول آن‌ها از مجموعه‌ی A و مؤلفه‌ی دوم آن‌ها از مجموعه‌ی B می‌باشد.

$\Downarrow$ به عبارتی

مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی که تمام اعضای مجموعه‌ی A را با تمام اعضای مجموعه‌ی B رابطه‌ی دهند.

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف : ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$$

مثال: حاصلضرب دکارتی $A=\{1,2\}$ در مجموعه‌ی $B=\{5,7,9\}$ کدام است

$$A\times B=\{(1,5),(1,7),(1,9),(2,5),(2,7),(2,9)\}$$

رابطه: به هر زیرمجموعه از حاصل ضرب دکارتی $A\times B$، یک رابطه از آن می‌گویند.

$$R:A\to B$$

$$R\subseteq A\times B$$

مثال: رابطه‌ای از $A=\{1,2\}$ به $B=\{5,7,9\}$ که بنویسید که مؤلفه‌ی اول آن زوج و مؤلفه‌ی دوم آن عدد اول باشد.

$$A\times B=\{(1,7),(1,5),(1,9),(2,5),(2,7),(2,9)\}$$

$$R=\{(2,5),(2,7)\}$$

مثال: رابطه‌ی $R=\{(x,y)\mid x,y\in N, 2x+y\leq 7\}$ دارای چند زوج مرتب است؟

$x=1 \longrightarrow 2+y\leq 7 \longrightarrow y=1,2,3,4,5$

$x=2 \longrightarrow 4+y\leq 7 \longrightarrow y=1,2,3$

$x=3 \longrightarrow 6+y\leq 7 \longrightarrow y=1$

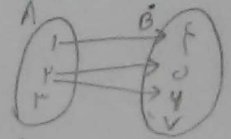
$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$$

۵(۱)
۶(۲)
۸(۳)
۹(۴ ✓)

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف : ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

تابع: مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به صورت یک رابطه که در آن به هر عضو مجموعه A دقیقاً یک عضو (نه کمتر نه بیشتر) از مجموعه‌ی B نسبت داده شده است.

مثال:



هر عضو از مجموعه‌ی اول تابع هست باید یک عضو داشته باشند

تابع است

نحوه‌ی تشخیص تابع:

① به کمک رابطه:

اگر مولفه‌ی اول دو یا چند زوج مرتب یکسان شد باید مولفه‌های دوم نیز یکسان باشند تا رابطه‌ی مربوط یک تابع باشد.

مثال:

$R_1 = \{(2,3)(3,1)(4,1)(4,2)\}$ تابع هست

$R_2 = \{(6,3)(3,5)(3,7)(4,7)\}$ تابع است

مثال: برای مجموعه‌های زیر کدام یک از روابط زیر از $A \times B$ تابعی می‌باشد؟

$A=\{1,2,3\}$ $B=\{4,5\}$

$R_1=\{(1,4),(2,4),(3,5)\}$ تابع است

$R_2=\{(2,4),(1,5),(2,5)\}$ تابع نیست

$R_3=\{(1,4),(3,5),(1,4)\}$ تابع است

$R_4=\phi$ تابع است

نکته: ϕ تابع می‌باشد.

کپی و استفاده از مطالب و تکنیک‌ها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد. مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

مثال: به ازای کدام مقدار a رابطه‌ی $R=\{(2a-1,2)(2,5)(3,2)(2a-1,2a)\}$ یک تابع است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ✓ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار

$2a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

مثال: رابطه‌ی $R=\{(3,m^2)(2,1)(-2,m)(3,m+2)(m,4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ✓ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

$m^2=m+2 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 & \times \\ m=-1 & \checkmark \end{cases}$

مثال: به ازای کدام مقدار a، رابطه‌ی $R=\{(a,4)(2,a^2+2a)(-5,1)(2,4)\}$ تابع است؟

۱) -۴ ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) بی شمار

$a^2+2a=4 \Rightarrow a^2+2a-4=0 \begin{cases} a=1 \checkmark \\ a=\frac{c}{a}=-4 \text{ ق ق} \end{cases}$

مثال: اگر مجموعه‌ی $\{(2a+3b,1)(3,8)(2,8)(1,a-b)(1,3)\}$ یک تابع باشد حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱ ۳) ۱/۸ ✓ ۴) ۰

$(a-b=2) \times 2 \Rightarrow \begin{cases} -2a+2b=4 \\ 2a+3b=2 \end{cases} \Rightarrow ab=-2 \Rightarrow b=-0/2$

$\Rightarrow a=2/4 \Rightarrow a+b=1/8$

کپی و استفاده از مطالب و تکنیک‌ها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد. مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

مثال: اگر رابطه‌ی $R=\{(3,4),(m,1),(3,m+2),(5,m)\}$ یک تابع باشد، دامنه‌ی این تابع چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

دامنه $D_f=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$

$m+2=4 \Rightarrow m=2$

$D_f=\{3,2,5\}$

مثال: اگر مجموعه‌ی A ۳ عضوی و مجموعه‌ی B ۵ عضوی باشد، حاصل ضرب دکارتی $A\times B$ چند عضوی است؟

۱) ۸ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

نکته: اگر مجموعه‌ی A n عضوی و مجموعه‌ی B m عضوی باشد $A\times B$ $(n.m)$ عضوی است

مثال: چند تابع از مجموعه‌ی $A=\{1,3,5,7\}$ به مجموعه‌ی $B=\{2,4,2,3\}$ می‌توان نوشت که حاصل‌ضرب دامنه‌ی آن‌ها $(3,2)$ باشد؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۵۴ ۳) ۸۱ ۴) ۲۷

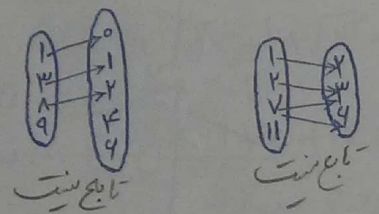
$\frac{3}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{54}{35}$

فقط ۳ عدد توان ۲ مربوط به ۳ پس ۲ نوع مرتب داریم.

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

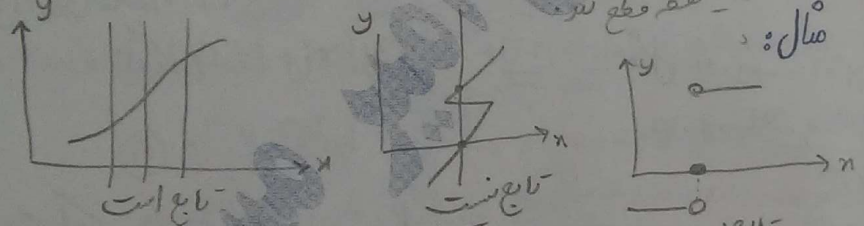
(۲) به کمک نمودار ون: ابتدا از عضو مشترک مجموعه‌ی اول (دقیقاً یک پیکان نه کمتر نه بیشتر) خارج شود.

مثال: کدام نمودار مربوط به یک تابع است؟

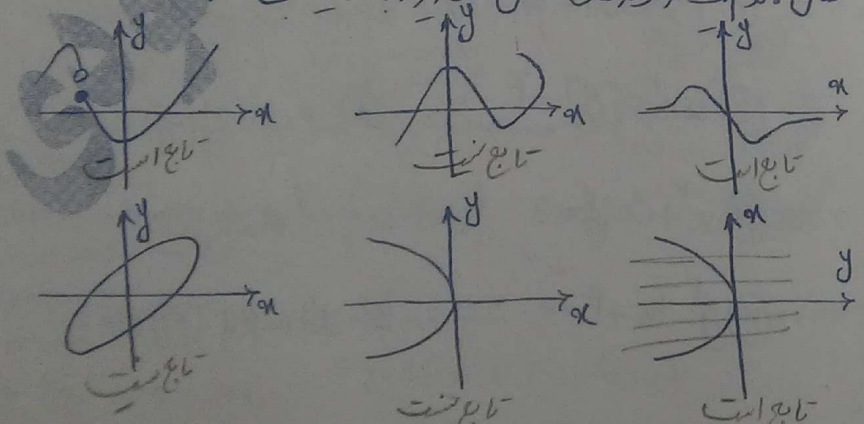


(۳) از روی منحنی یا نمودار محصاتی: هر خط به موازات محور yها یا عرض‌ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال:

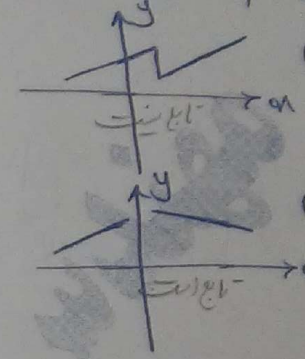


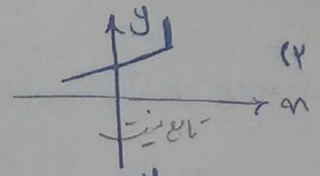
مثال: کدام یک از نمودارهای شکل‌های زیر مربوط به یک تابع است؟



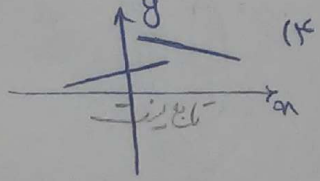
کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

مثال: کدام شکل نمودار یک تابع است؟

(۱)


(۲)


(۳) ✓

(۴)


④ از روی ضابطه:

* ازای هر x فقط و فقط باید یک y داشته باشیم

مثال: $y^2=1 \longrightarrow y=\pm 1$

$y^2=x \xrightarrow{x=1} y=\pm 1$ تابع نمی‌باشد

مثال: کدام یک از روابط زیر تابع می‌باشند؟

① $|x|+|y|=5 \xrightarrow{x=0} |y|=5 \Rightarrow y=\pm 5$ تابع نمی‌باشد

② $5x^2-[y]=4 \xrightarrow{x=0} -[y]=4 \Rightarrow [y]=-4 \Rightarrow -4\le y<-3$ تابع می‌باشد

③ $x^2+\cos y=x \xrightarrow{x=0} \cos y=0 \Rightarrow y=k\pi+\frac{\pi}{2}$ تابع می‌باشد

④ $y^4-2x+4=0 \xrightarrow{x=10} y^4-16=0 \Rightarrow y^4=16 \Rightarrow y=\pm 2$

* حاصل جمع چند عبارت نامنفی
① می‌تواند منفی باشد ② زمانی صفر است که تک تک آن عبارات برابر صفر باشند.

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

⑤ $x=y^3\sqrt{y}$ $x=1 \longrightarrow y=\pm 1$ تابع نمی‌باشد

⑥ $\underbrace{|y+3|}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(x-5)^4}_{\text{نامنفی}}=0$ $y+3=0 \Rightarrow y=-3$, $x-5=0 \Rightarrow x=5$ تابع می‌باشد

⑦ $x^2-2x+1+\sqrt{y^2}=0$ $(x-1)^2+|y|=0$ $x-1=0 \Rightarrow x=1$, $y=0$ تابع می‌باشد. ← یک نقطه تابع است

⑧ $y^2-6y+x^2+2x+\frac{10}{9+1}=0$ $y^2-6y+9+x^2+2x+1=0 \Rightarrow (y-3)^2+(x+1)^2=0 \begin{cases} y=3 \\ x=-1 \end{cases}$ تابع است

⑨ $\sqrt[4]{\underbrace{x-5}_{\text{نامنفی}}}+\underbrace{y^6}_{\text{نامنفی}}=\underbrace{-5}_{\text{نمی‌تواند منفی باشد}} \Rightarrow \phi$ جواب تابع است

⑩ $|y-3|+|x|+7=0 \Rightarrow \underbrace{|y-3|}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{|x|}_{\text{نامنفی}}=-7 \Rightarrow$ جواب ϕ تابع می‌باشد

⑪ $y^3-y=x^2-1$ $x=1 \longrightarrow y^3-y=0 \Rightarrow y(y^2-1)=0 \begin{cases} y=0 \\ y=\pm 1 \end{cases}$ تابع نمی‌شود

⑫ $y^3+y=\underbrace{|x|}_{\text{یک عدد مثبت}}-1$ تابع می‌باشد

نکته: هر معادله‌ی مرتبه‌ی فرد حداقل یک جواب دارد
برعکس دیگر برقرار نیست ← معادله‌ی زوج ← ۰ یا مثبت عبارت
برعکس دیگر برقرار نیست ← تابع فرد ← ۰ یا منفی عبارت

$y^3+y+1=0$ ← معادله‌ی مرتبه‌ی فرد ← جواب دارد ← نمودار ← تقاطع با محور y دارد

⑬ $y=|x^3-|2x|+\sin x|x||+\sqrt[5]{x}$ چون x برحسب x داریم یک قدر مطلق موجود است ← پس قطعاً یک تابع می‌باشد

نکته: هر عبارت صعودی یا نزولی دقیقاً یک ریشه دارد

⑭ $y=x\pm\sqrt{x} \longrightarrow x=4 \longrightarrow y=\begin{cases} 4+2=6 \\ 4-2=2 \end{cases}$ تابع نیست

نکته: دقت کنید در ضابطه مثبت منفی یک عبارت را داشته باشیم ۲ مقدار به ما می‌دهد پس تابع نیست

⑮ $y=x^2\pm[x-[x]]$ $*\ 0\le x-[x]<1$ تابع است ← صفر

⑯ $|y|=2x-x^2-1$ $*\ |u|=0 \Rightarrow u=0$

$\Rightarrow y=\pm(2x-x^2-1)$ تابع نمی‌باشد

نکته: ضابطه‌ی مربوط به یک تابع نباشد مگر آنکه عبارت موجود جلوی ± مثبت منفی برابر صفر باشد

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

مثال: کدام رابطه یک تابع است؟

۱) $y^3-3y^2+x=0$

۱) $x=0 \longrightarrow y^3-3y^2=0 \longrightarrow y^2(y-1)=0 \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$

۲) $y+y^3=\underbrace{x^3+1}_{\text{عدد ثابت}}$ ✓

به ازای هر x سمت راست عدد ثابت می‌شود

$\underbrace{y+y^3-\text{عدد ثابت}=0}_{\text{معادله‌ی مرتبه فرد}} \xRightarrow{\text{مشتق}} 1+3y^2>0$ معدودی تابع است

۳) $|y-1|+x=0$

۳) $x=-1 \longrightarrow |y-1|=1 \Rightarrow y-1=\pm1 \Rightarrow y=\begin{cases}2\\0\end{cases}$

۴) $xy^2-x=1$

۴) $x=1 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

مثال: در کدام یک از روابط زیر y تابع x است؟

۱) $y^3+3y^2+3y+x^3+x=0$ ✓

۲) $y^2+2y=x-1$

۲) $x=1 \Rightarrow y^2+2y=0 \Rightarrow y(y+2)=y=\begin{cases}y=0\\y=-2\end{cases}$ تابع

۳) $|x|+|y-1|=1$

۳) $x=0 \longrightarrow |y-1|=1 \Rightarrow y-1=\pm1 \begin{cases}y=2\\y=0\end{cases}$ تابع نیست

۴) $|y|+\sqrt[3]{x}=1$

۴) $x=0 \longrightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm1$ تابع نیست

تشخیص تابع در عبارت‌های چندضابطه‌ای:

شروط تابع بودن عبارت‌های چندضابطه‌ای:
① هر یک از ضابطه‌ها به خودی خود تابع باشند
② x مشترکی بین ضابطه‌ها وجود داشته باشد و آن وجود داشت مقدار عددی ضابطه‌ها به ازای آن x مشترک با هم برابر باشند.

مثال: $y=\begin{cases}2x-2 & x\geq1\\ x^2+1 & x\leq1\end{cases} \Rightarrow \underset{\text{مشترک است}}{x=1} \Rightarrow y=\begin{cases}0\\2\end{cases}$ تابع نیست

محاسبه‌ی مقدار تابع:

در توابع تک ضابطه‌ای:

به جای x ورودی مد نظر خود را قرار می‌دهیم و با محاسبه‌ی خروجی به مقدار تابع دسترسی پیدا می‌کنیم.

در توابع چندضابطه‌ای:

ابتدا به دامنه‌ی ضابطه‌ها توجه می‌کنیم و به کمک آن ضابطه‌ی به درد بخور را انتخاب کرده و با تزریق ورودی به آن خروجی را که در واقع همان مقدار تابع می‌باشد را تحویل می‌گیریم.

نکته: روش مربع کامل کردن:

$$x^2\pm mx=(x\pm\underbrace{\tfrac{m}{2}}_{\text{نصف}})^2-\underbrace{\tfrac{m^2}{4}}_{\text{توان ۲}}$$

مثال:

$x^2+4x=(x+2)^2-4$

$x^2-6x=(x-3)^2-9$

$x^2-8x=(x-4)^2-16$

$x^2+10x=(x+5)^2-25$

مثال: مقدار $f(x)=x^2-8x+10$ به ازای $\sqrt{3}+4$ کدام است.

روش ① $f(\sqrt{3}+4)=(\sqrt{3}+4)^2-8(\sqrt{3}+4)+10$

روش ② $\Rightarrow (x-4)^2-16+10=(x-4)^2-6 \Rightarrow x=\sqrt{3}+4 \Rightarrow (\sqrt{3})^2-6 \Rightarrow 3-6=-3$

مثال: اگر تابع $f(\sqrt{x})=x+\sqrt{x}$ باشد، آن‌گاه $f(2)+f(1)$ کدام است؟

$f(2)=6$

$f(1)=2$

$f(2)+f(1)=6+2=8$

مثال: if $f(x)=(x-1)^4+(x-1)^2 \longrightarrow f(\sqrt{3}+1)=?$

$f(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3}+1-1)^2+(\sqrt{3}+1-1)^2=9+3=12$

مثال: if $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}} & x<1\\ 2x-\dfrac{3}{4} & x\geq 1\end{cases} \longrightarrow f(f(\frac{3}{4}))=?$

$f(\frac{3}{4})=\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

$f(\frac{3}{2})=2\times\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

مثال: if $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+7} \longrightarrow f(\sqrt{3}-2)=?$

روش مربع کامل $\Rightarrow \dfrac{(x+2)^2-4+5}{(x+2)^2-4+7}=\dfrac{3-4+5}{3-4+7}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

مثال: if $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+12} \longrightarrow f(2+\sqrt{7})-f(2)=?$

$f(2+\sqrt{7})=\sqrt{-(x-2)^2-4-12}=\sqrt{-(7-4-12)}=\sqrt{9}=3$

$f(2)=4 \qquad f(2+\sqrt{7})-f(2)=3-4=-1$

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه‌ی $(-2,-6)$ می‌گذرد. $f(-1)$ کدام است؟

$f(x)=ax^2+bx+c=\begin{cases}(1,0)\\(0,-6)\\(-2,-6)\end{cases}$

$\Rightarrow x=1,\ y=0 \Rightarrow a+b+c=0$

$\Rightarrow x=0,\ y=-6 \Rightarrow c=-6$

$\Rightarrow x=-2,\ y=-6 \Rightarrow 4a-2b+c=-6$

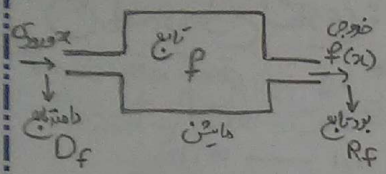
$\Rightarrow \begin{cases}a+b=6\\4a-2b=0\end{cases}$

$6a=12 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$\boxed{b=4}$

$f(-1)=2-4-6=-8$

مفهوم دامنه و برد تابع:



مثال: $f(x)=2x^2+5 \xrightarrow{x=1} 7$

روش محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع:

① دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای:

① $y=ax^n+b^{n-1}+\dots$

$D_y=R$

② دامنه‌ی توابع کسری:

$y=\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\text{دامنه}]{\text{برای محاسبه}} \left.\begin{matrix}D_f\\D_g\\g\neq 0\end{matrix}\right\}\cap \longrightarrow D_y$

③ دامنه‌ی توابع رادیکالی:

$y=\sqrt[\text{فرد}]{f(x)} \Rightarrow D_y=D_f$

$y=\sqrt[\text{زوج}]{f(x)} \xrightarrow[\text{دامنه}]{\text{برای محاسبه}} f(x)\geq 0$

④ دامنه‌ی توابع لگاریتمی:

تذکر: در حل نامعادله لگاریتمی داریم $\log_b^a > c$

$b>1 \longrightarrow a>b^c$

یا

$0<b<1 \longrightarrow a<b^c$

$y=\log_{g(x)}^{f(x)}$

برای محاسبه دامنه

$\left.\begin{array}{l} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ g(x)\neq 1 \end{array}\right\} \cap \longrightarrow D_y$

⑤ دامنه‌ی توابع قدرمطلق و براکتی:

قدرمطلق و براکت تأثیری رو بدست آوردن دامنه ندارند.

$y=|f(x)| \longrightarrow D_y=D_f$

$y=[f(x)] \longrightarrow D_y=D_f$

⑥ دامنه‌ی توابع مثلثاتی:

$\left.\begin{array}{l} y=\sin(f(x)) \\ y=\cos(f(x)) \end{array}\right\} D_y=D_f$

$y=\tan(f_x) \longrightarrow D_y=\{x \mid f(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

$y=\cot(f(x)) \longrightarrow D_y=\{x \mid f(x)\neq k\pi\}$

⑦ دامنه‌ی توابع معکوس مثلثاتی:

ویژه‌ی ریاضی‌ها

$\left.\begin{array}{l} y=\text{Arc}\sin(f(x)) \\ y=\text{Arc}\cos(f(x)) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{برای محاسبه دامنه}} -1\leq f(x)\leq 1$

$\left.\begin{array}{l} y=\text{Arc}\tan(f(x)) \\ y=\text{Arc}\cot(f(x)) \end{array}\right\} \longrightarrow D_y=D_f$

* $\text{Arc}=\dots$ کدام زاویه است که

تذکر: موارد زیر در محاسبه‌ی دامنه غیرمؤثرند:

رادیکال فرجه فرد - قدرمطلق - براکت - Arccot - Arctan - cos - sin

مثال: $y=\sin(\cos(\sqrt[5]{[x^3+2x^2+5]})) \xrightarrow{D_y=?} D_y=R$

مثال:

$* \; y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \quad D_y=?$

مهم: * بدون ساده سازی اقدام به محاسبه دامنه کنید. حتی در صورت وجود سازی

$\left.\begin{array}{l} D_f=R \\ D_g=R \end{array}\right\} \cap = R$

$D_y=R-\{\pm 1\}$

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

مثال

$y=\frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)}$

$D_f=R$

$D_g(x)=R$

$D=R-\{2,3,5,6\}$

$* \; y=\frac{2x+1}{4x^2+3x+1} \quad D_y=?$

$\left.\begin{array}{l} D_{f(x)}=R \\ D_{g(x)}=R \end{array}\right\} \cap = R \Rightarrow D_y=R$

$4x^2+3x+1=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=9-4(4)=-7<0$

مخرج ریشه‌ی صفر ندارد

$* \; y=\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+2}}{\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x-1}} \quad D_y=?$

$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x-1}=0$

$\frac{x^2-1-x^2-2x}{(x-2)(x+1)}=0$

$-1-2x=0 \Rightarrow 2x=-1$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$y=\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+2}}{\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x-1}}$

$\frac{1}{x+1}=0 \Rightarrow x=-1$

$\frac{x}{x+2}=0 \Rightarrow x=-2$

$\frac{x+1}{x+2}=0 \Rightarrow x=-2$

$\frac{x}{x-1}=0 \Rightarrow x=1$

$D_y=R-\{-2,-1,-\frac{1}{2},1\}$

$* y=\frac{1}{x^2-2|x-1|-2x-2}$ $D_y=?$

$D_y=R-\{-2,4\}$

$x^2-2|x-1|-2x-2=0$

$|x-1|=3 \Rightarrow x-1=3 \Rightarrow x=4$ ، $x-1=-3 \Rightarrow x=-2$

عبارت داخل قدر مطلق نمی‌تواند منفی باشد

$x^2-2x+1-2|x-1|-3=0 \Rightarrow (x-1)^2-2|x-1|-3=0$

$A=|x-1|$

$A^2-2A-3=0$

$A=-1$ ، $A=3$

$* y=\sqrt{-x^2-x+2}$ $D_y=?$

$-x^2-x+2 \geq 0 \Rightarrow -x^2-x+2=0 \Rightarrow x=1, x=-2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0 $-$

$D_y=[-2,1]$

$* y=\sqrt[4]{2x^2-5x+3}$ $D_y=?$

$2x^2-5x+3 \geq 0 \Rightarrow 2x^2-5x+3=0 \Rightarrow x=1, x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0 $+$

$D_y=(-\infty,1] \cup [\frac{3}{2},+\infty)$

$* y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$ $D_y=?$

① $x^2<a^2 \Rightarrow -a<x<a$

② $x^2>a^2 \Rightarrow x \geq a$ یا $x \leq -a$

نکته:

$9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$ $D_f=[-3,3]$

$D_g=R$

$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$D_y=[-3,3]-\{\pm 2\}$

$* y=\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{9-x^2}}$ $D_y=?$

x	-3	2	3
$f(x)$	$-$	0 $+$	$\pm\infty$ $-$

$D_y=(-3,2]$

$y=\frac{x^2+x+1}{[x]-2}$ $D_y=?$

رشته صورت $=(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x=2, x=3$

رشته مخرج $=\pm 3$

$D_f=R$ $D_y=R-[2,3)$

$D_g=R$

$[x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2 \leq x<3$

$* y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{[x]-1}$ $D_y=?$

$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$[x]-1 \Rightarrow R=D_g$

$[x]-1=0 \Rightarrow 1 \leq x<2$

$D_y=[-2,2]-[1,2)$

$=[-2,1) \cup \{2\}$

$* y=\frac{x^2+x+1}{2[x]-1}$ $D_y=?$

$D_f=R$ $D_g=R$ $\Rightarrow D=R$ $D_y=R$

$2[x]-1=0 \Rightarrow [x]=\frac{1}{2}$ ← صحیح نداره

$* y=\sqrt{|x|-x^2}$ $D_y=?$

$* x \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$* x \geq a$ یا $x \leq -a \Rightarrow x \geq a$

$|x|-|x|^2 \geq 0 \Rightarrow |x|(1-|x|) \geq 0$ ← همیشه نامنفی

$\Rightarrow 1-|x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$D_y=[-1,1]$

$* y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{|x^2-3|-1}}$ $D_y=?$

رادیکال فرجه فرد ← تأثیری ندارد

$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-1}{|x^2-3|-1}$

$D_f=R$

$D_g=R$

$|x^2-3|-1=0 \Rightarrow |x^2-3|=1$

$x^2-3=1 \Rightarrow x=\pm 2$

$x^2-3=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$D_y=R-\{\pm\sqrt{2},\pm 2\}$

$* y=\sqrt{1-\sqrt{1-4x^2}}$ $D_y=?$

* اگر با رادیکال‌ها خوب تمرین نکرده باشید کار خود را با توجه به تمرین رادیکال شروع کنید و از دامنه ماتون استفاده می‌کنید.

$1-4x^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$1-\sqrt{1-4x^2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1-4x^2} \leq 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1-4x^2 \leq 1 \Rightarrow -4x^2 \leq 0 \Rightarrow R=D_f$

همواره بد نیست به ازای تمام xها

$D_y=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$[a,b]$ ← جزء صحیح ← $b-a+1$

* $y=\sqrt{4-\sqrt{x+1}}$ ⟶ D_y چند عدد صحیح است؟

$x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$

$4-\sqrt{x+1}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1}\leq 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+1\leq 16 \Rightarrow x\leq 15$

$-1\leq x\leq 15 \Rightarrow D_y=[-1,15]$

تعداد صحیح $=1+15+1=17$

* $y=\sqrt{3-\sqrt{1-4x}}$ ⟶ D_y چند عدد صحیح است؟

$1-4x\geq 0 \Rightarrow 4x\leq 1 \Rightarrow x\leq \frac{1}{4}$

$\sqrt{1-4x}\geq 0 \Rightarrow 3-\sqrt{1-4x}\leq 3$

$3-\sqrt{1-4x}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{1-4x}\leq 3 \Rightarrow 1-4x\leq 9 \Rightarrow -4x\leq 8 \xrightarrow{\div -4} x\geq -2$

$-2\leq x\leq \frac{1}{4}$ ⇒ ۳ عدد صحیح

* $y=\sqrt{x+3|x-1|-4}$ ⟶ D_y چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

$x\geq 0 \Rightarrow y=\sqrt{x+3x-3-4}=\sqrt{4x-9}$

$x<0 \Rightarrow y=\sqrt{x-3x+3-4}=\sqrt{-2x-1}$

$4x-9\geq 0 \Rightarrow 4x\geq 9 \Rightarrow x\geq \frac{9}{4}$

$-2x-1\geq 0 \Rightarrow -2x\geq 1 \Rightarrow x\leq -\frac{1}{2}$

$D_y=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup[\frac{9}{4},+\infty)$

$\begin{cases}|u|=u & u\geq 0\\ |u|=-u & u<0\end{cases}$

* $f(x)=\left(\frac{2|x|(x-3)}{x+4}\right)^3$ ⟶ D_f چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

$f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{2|x|(x-3)}{x+4}\right)^3}$

$\left(\frac{2|x|(x-3)}{x+4}\right)^3\geq 0 \Rightarrow \frac{2x(x-3)}{x+4}\geq 0$

$2x(x-3)=0 \Rightarrow x=0,3$

$x+4=0 \Rightarrow x=-4$

x	-4	0	3
$\frac{2x(x-3)}{x+4}$	$+\infty$	$-$	$+$

$D_f=(-\infty,-4)\cup\{0\}\cup[3,+\infty)$

۹ عدد صحیح را شامل می‌شود

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

* دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-2\sqrt{x+1}}}$ در بازه‌ی $[a,b]$ چند عدد صحیح است؟ مقدار $b-a$ چقدر است؟

$D_f=R$

$D_g=\begin{cases}x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1\\ g\neq 0\end{cases}$

$3-2\sqrt{x+1}>0 \Rightarrow 2\sqrt{x+1}<3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(x+1)<9 \Rightarrow 4x+4<9$

$4x<5 \Rightarrow x<\frac{5}{4}$ $\quad\Rightarrow -1<x<\frac{5}{4}$

$D_y=[-1,\frac{5}{4}) \Rightarrow b-a=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4}$

(a: -1، b: $\frac{5}{4}$)

* دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+14}}{x^2+ax+b}$ به صورت $R-\{-2,4\}$ است، $f(3)$ چقدر است؟

$y=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+ax+b}$

$D_f=x^2+14\geq 0 \Rightarrow D_f=R$

$D_g=R$

$g\neq 0$ ⟵ ریشه‌های مخرج

$\Rightarrow D_y=R-\{\text{ریشه‌های مخرج}\} \Rightarrow D_y=R-\{\underbrace{-2,4}_{\text{ریشه‌های مخرج}}\}$

$x^2-5x+p=0 \Rightarrow S=4,\ P=1$

$x^2-2x-8=0 \Rightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=-8\end{cases}$ $\quad x^2+ax+b=0$

$f(2)=\frac{5}{-a}=\frac{5}{-1}$

* اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{x^2+10x+2}{4x^2+ax+b}$ برابر $R-\{3\}$ باشد، $3a+2b$ چقدر است؟

$D_f=R$

$D_y=R$

$g\neq 0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$ مخرج $=(2x-6)^2=4x^2-24x+36$

(چون عددی بودیم که اگر مخرج صفر شود باید یکی از ریشه‌ها ۳ شود)

$a=-24$ $\quad b=36$

$3a+2b=3(-24)+2(36)=-72+72=0$

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

* اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2+ax+b}$ برابر $R-\{-1\}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

ریشه مضاعف پس به صورت $(x\pm a)$

ریشه‌های مخرج

$D_f=R$

$D_g=R$

$g\neq 0$

$\Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x^2+2x+1 \Rightarrow 2+1=3$

$a \quad b$

* $y=\log_{x-1}^{9-x^2}$ $\quad D_y=?$

یادآوری: $f(x)>0$, $g(x)>0$, $g\neq 1$

$9-x^2>0 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow -3<x<3$

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$x-1\neq 1 \Rightarrow x\neq 2$

$D_y=(1,3)-\{2\}$

* $y=\log_{10}^{x^2-4x+3}$ $\quad D_y=?$

$x^2-4x+3>0$

$10>0$

$10\neq 1$

$x^2-4x+3=0$

$x=1 \quad x=3$

x		1		2	
x^2-4x+3	+	0	−	0	+

$D_y=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

* دامنه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\log_{10}(x-1)}$ به کدام صورت است؟

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$10>0$

$10\neq 1$

$1-\log_{10}^{x-1}\geq 0 \Rightarrow \log_{10}^{x-1}\leq 1 \Rightarrow x-1\leq 10^1$

$\Rightarrow x\leq 11$

$D_{f(x)}=1<x\leq 11=(1,11]$

* دامنه‌ی $f(x)=\sqrt[4]{2-2\log(x+1)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$10>0$

$10\neq 1$

$2-2\log_{10}^{x+1}\geq 0 \Rightarrow \cancel{2}\log_{10}^{x+1}\leq \cancel{2}$

$\Rightarrow \log_{10}^{x+1}\leq 1 \Rightarrow x+1\leq 10^1$

$\Rightarrow x\leq 9$

$D_{f(x)}\ -1<x\leq 9=(-1,9]$

$9-0+1=10$ عدد صحیح

* $y=\sin(\cos(\sin(\sqrt[3]{[x^2-x+9]})))$ $\quad D_y=?$

$y=x^2-x+9 \Rightarrow D=R$

$y=\tan f(x)$

* $y=\cot(2x+\frac{\pi}{3})$ $\quad D_y=?$

$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi \Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$

$D_y=R-\{\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\}$

* $y=5\tan(2x-\frac{\pi}{4})+10$ $\quad D_y=?$

$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$

$D_y=R-\{\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\}$

ویژه‌ی ریاضی

* $y=\operatorname{Arctan}(\cos\sqrt{4-x^2})$ $\quad D_y=?$

$y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow 4-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$

$D_y=[-2,2]$

ویژه‌ی ریاضی

* $y=\operatorname{Arcsin}(2x+5)+9x^2+10$ $\quad D_y=?$

$-1\leq 2x+5\leq 1 \xrightarrow{-5} -6\leq 2x\leq -4 \xrightarrow{\div 2}$

$-3\leq x\leq -2$ $\quad D_y=[-3,-2]$

* $y=\text{Arc}\sin\left(\sqrt{(x^2-1)^2(4x-1)^2}+1\right)$ → D_y چند عدد صحیح است؟

(۰۲) نامنفی بودن رادیکال

$f(x)$

$-1\le f(x)\le 1$

$\sqrt{(x^2-1)^2(4x-1)^2}=0$ ⟨ $x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$ ، $4x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$

$D_y=\{-1,\frac{1}{4},1\}$

۲ عدد صحیح

پاسخ:

تست: دامنه‌ی $y=\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}+\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

(۱) $[1,2]$ ✓

(۲) $(2,3)$

(۳) $[1,3)$

(۴) $(3,+\infty)$

$x=1\to y=\sqrt{0}+\sqrt{1}\Rightarrow x=1$ جزو دامنه هست

$x=2\to y=\sqrt{-1}$ ✗ جزو دامنه نیست

تست: دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R}$

(۲) $x\le 1$

(۳) $x>1$

(۴) $-1\le x\le 1$ ✓

$x=10\to y=\sqrt{-}$ ✗ جزو دامنه نیست

$x=-10\to y=\sqrt{-}$ ✗ جزو دامنه نیست

تست: دامنه‌ی تابع $y=\frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$ کدام است؟

(۱) $x>1$

(۲) $(-\infty,0)$

(۳) $[-\infty,0)$

(۴) $[0,+\infty)$ ✓

$x=1\to y=0$ جزو دامنه می‌باشد.

$x=0\to y=$ نامعین جزو دامنه نیست

تست: اگر $f(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟

(۱) $[-1,1]$

(۲) $(-\infty,\infty)$

(۳) $(-\infty,+\infty)$ ✓

(۴) $(0,+\infty)$

$x=0\to f(0)=1-1=0\Rightarrow y=0$ جزو دامنه هست

$x=2\to f(2)=\frac{3}{4}\Rightarrow y=\frac{3}{2}$ جزو دامنه هست

تست: دامنه‌ی تابع f شامل ۲ نقطه از $\mathbb{R}$ نمی‌باشد. کدام ضابطه می‌تواند ضابطه‌ی $f(x)$ غیرکامل صحیح است؟

(۱) $y=\frac{1}{x^2-3x-5}$

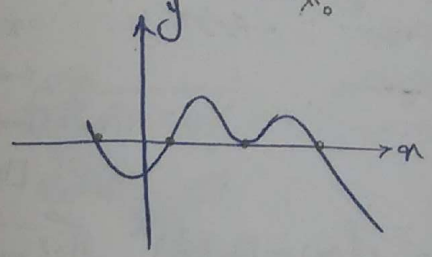
(۲) $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}$

(۳) $y=\frac{2x-4}{x^2-4x}$

(۴) $y=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-2)(x+3)}$ ✓

(۴) مخرج $=0\Rightarrow x=0$ و 2 و $-3\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{0,2,-3\}$

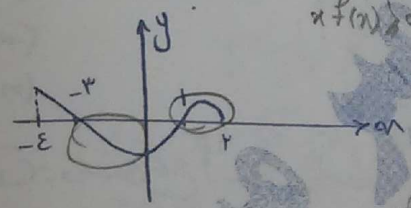
تست: نمودار $f(x)$ به شکل روبه‌رو است. دامنه‌ی تابع $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ($f(x)\neq 0$) شامل چند نقطه از R نمی‌باشد؟



۴
۳
۲
۱

تست: شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

$xf(x)\geq 0$



x و f(x) باید هم علامت باشند یا هر دو صفر باشند

$[0,2]$

$[-3,2]$

$[-4,-3]\cup[1,2]$

$[-3,0]\cup[1,2]$

در نواحی ۱ (۳)

$x, f(x)$ هم علامتند

$[-3,0]\cup[1,2]$

$D\sqrt{xf(x)}$

روش محاسبه‌ی برد تابع:

(۱) درصورت امکان x را برحسب y بدست می‌آوریم و شرط وجود جواب حقیقی برای x را اعمال می‌کنیم تا محدوده‌ی قابل قبول و مجاز برای y بدست آید.

(۲) برد توابع $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ و چند جمله‌ای‌های درجه فرد مجموعه‌ی اعداد حقیقی یعنی R می‌باشند.

$y=\tan 4x$

$y=\cot(5x^2+10)$ $\Rightarrow R_f=R$

$y=x^3+4x^2-5$

(۳) درمورد توابع مموگرافیک

$y=\frac{ax+b}{ex+d}$ $D_y=R-\{-\frac{d}{c}\}$ $R_f=R-\{\frac{a}{c}\}$

مثال: $y=\frac{5x-3}{2x-4}$ $D_y=R-\{2\}$ $R_f=R-\{\frac{5}{2}\}$

(۴) $0\leq u-[u]<1$

مثال $0\leq 5x-[5x]<1$

③ * در مورد عبارت $a+\frac{1}{a}$

if $a>0 \rightarrow a+\frac{1}{a} \geq 2$

if $a<0 \rightarrow a+\frac{1}{a} \leq -2$

*

if $\alpha\beta \geq 0 \rightarrow |\alpha+\beta| \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

⑨ *

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \quad \frac{1}{2^{n-1}} \leq \sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leq 1$

$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\sin\alpha + b\cos\alpha \leq \sqrt{a^2+b^2}$

$\min\{a,b\} \leq a|\sin\alpha| + b|\cos\alpha| \leq \sqrt{a^2+b^2}$

تذکر:

$$\begin{cases} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \\ \sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\ \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \\ \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \end{cases}$$

⑦ $y=ax^2+bx+c$

$a>0 \quad R_y=[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$

$a<0 \quad R_y=(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$

مثال:

* $y=\frac{x+1}{x} \quad R_y=?$

① روش $\rightarrow xy=x+1 \Rightarrow xy-x=1 \Rightarrow x(y-1)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{(y-1)} \Rightarrow R_y=R-\{1\}$

② روش (تابع معرف نباشد) $\rightarrow \frac{1x+1}{1x+0} \rightarrow R_y=R-\{1\}$

* $y=x^4+\frac{1}{x^4} \quad R_y=?$

$a+\frac{1}{a} \xrightarrow{a>0} a+\frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow R_y=[2,+\infty)$ (شکل صفحه)

* $y=\frac{x^4+2}{\sqrt{x^4+1}} \quad R_y=?$

$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ تکنیک

$\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$: تذکر

$y=\frac{(x^4+1)+1}{\sqrt{x^4+1}}=\frac{x^4+1}{\sqrt{x^4+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \Rightarrow y=\underbrace{\sqrt{x^4+1}}_{a}+\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^4+1}}_{a}} \Rightarrow y \geq 2 \quad R_y=[2,+\infty)$

* $y=\frac{x^6+4x^2+5}{x^2+2} \quad R_y=?$

$\frac{x^6+4x^2+4+1}{x^2+2}=\frac{(x^2+2)^2+1}{x^2+2}=\underbrace{x^2+2}_{a}+\frac{1}{\underbrace{x^2+2}_{a}} \xrightarrow{a>0}$

$x^2+2+\frac{1}{x^2+2} \geq 2 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow R_y=[2,+\infty)$

$* y = x + \frac{1}{x-2}$ $\quad Ry = ?$

$y = \underbrace{(x-2)+\frac{1}{x-2}}_{f} + 2$

$x > 2 \rightarrow x-2 > 0$

$x < 2 \rightarrow x-2 < 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a>0 & f \geq 2 \xrightarrow{\pm 1} f+1 \geq 3 \\ a<0 & f \leq -2 \xrightarrow{\pm 1} f+1 \leq -1 \end{cases}$

$* y = x + 4 + \frac{1}{x+2}$ $\quad Ry = ?$ $\quad Ry = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

$y = \underbrace{x+2+\frac{1}{x+2}}_{f} + 1 \Rightarrow \begin{cases} a>0 & f \geq 2 \xrightarrow{+1} \underbrace{f+1}_{y} \geq 3 \\ a<0 & f \leq -2 \xrightarrow{+1} \underbrace{f+1}_{y} \leq -1 \end{cases}$ $\quad Ry = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

$* y = \underbrace{x^2}_{\alpha} + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\beta}$ $\quad Ry = ?$

نکته: if $\alpha\beta \geq 0 \rightarrow |\alpha| + |\beta| \geq 2\sqrt{|\alpha\beta|}$

$\alpha\beta = x^2 \times \frac{9}{x^2} = 9 \geq 0 \rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} \geq 2\sqrt{9}$

$x^2 + \frac{9}{x^2} \geq 6$ $\quad Ry = [6, +\infty)$

$* y = \underbrace{(x^2+1)}_{\alpha} + \underbrace{\frac{2}{3(x^2+1)}}_{\beta}$ $\quad Ry = ?$

$\alpha\beta = (x^2+1) \times \frac{2}{3(x^2+1)} = \frac{2}{3} > 0$

$y \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow Ry = [2\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty)$

$* y = \frac{x}{1+x^2}$ $\quad Ry = ?$

صورت < مخرج $\Rightarrow \frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}} < 1 \Rightarrow Ry < 1$

$x^2 \geq 0$ و کل قاطع حداقل مقدارش ۰ و بیشتر نمیشه $\Rightarrow 0 \leq Ry < 1$

$* y = 2\sin^4 \frac{x}{3}$ $\quad Ry = ?$

$-1 \leq \sin \frac{x}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2\sin \frac{x}{3} \leq 2$

$Ry = [-2, 2]$

$y = 2\cos 3x + 2$

$-1 \leq \cos 3x \leq 1$

$-2 \leq 2\cos 3x + 2 \leq 4$

$Ry = [-2, 4]$

$* y = \frac{2\tan^2 \frac{x}{3}}{1+\tan^2 \frac{x}{3}}$ $\quad Ry = ?$

$y = 2 \times \frac{2\tan \frac{x}{3}}{1+\tan^2 \frac{x}{3}} = 2\sin 2\frac{x}{3} = 2\sin \frac{2x}{3}$

$-1 \leq \sin \frac{2x}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2\sin \frac{2x}{3} \leq 2$

$Ry = [-2, 2]$

$* \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$* y = \frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}\cos x \cos 2x \cos 4x$ $\quad Ry = ?$

$\frac{1}{2}\sin x$ $\quad \frac{1}{2}\sin 2x$ $\quad \frac{1}{2}\sin 4x$ $\quad \frac{1}{2}\sin 8x$

$y = \frac{1}{8}\sin 8x$

$-1 \leq \sin 8x \leq 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{8}} -\frac{1}{8} \leq \frac{1}{8}\sin 8x \leq \frac{1}{8}$

$Ry = [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$

$* y = \frac{\tan x(1-\tan^2 x)}{3(1+\tan^2 x)^2}$ $\quad Ry = ?$

$y = \frac{2\tan x(1-\tan^2 x)}{2 \times 3(1+\tan^2 x)^2} = \frac{1}{6} \quad \frac{2\tan x(1-\tan^2 x)}{3(1+\tan^2 x)^2}$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right)\left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right) = \frac{1}{12}\sin 4x$

$\sin 2x \quad \cos 2x$

$\frac{1}{2}\sin 4x$

$-1 \leq \sin 4x \leq 1$

$-\frac{1}{12} \leq \frac{1}{12}\sin 4x \leq \frac{1}{12}$

$Ry = [-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}]$

$$* \; y = \sin^8 x + \cos^8 x \qquad R_y = ?$$

$n=4$

$y = \sin^{2(4)} + \cos^{2(4)} \Rightarrow \frac{1}{8} \le \sin^8 x + \cos^8 x \le 1 \qquad R_y = [0\frac{1}{8}, 1]$

$\frac{1}{2^{n-1}} \le \sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le 1$

$$* \; y = 3x^2 + 5x + 2 \qquad R_y = ?$$

$R_y = [\frac{-1}{12}, +\infty)$

$y = ax^2 + bx + c \begin{cases} a>0 \\ a<0 \end{cases} \quad R_y^* = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty) \quad R_y = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$

$b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$

$$* \; y = \frac{2x}{9+x^2} \qquad R_y = ?$$

$9y + yx^2 = 2x \Rightarrow \underset{a}{y}x^2 - \underset{b}{2}x + \underset{c}{9y} \Rightarrow \Delta \ge 0 \to 4 - 4(9y)^2 \ge 0 \to 4 - 36y^2 \ge 0$

$36y^2 \le 4 \to y^2 \le \frac{1}{9} \to -\frac{1}{3} \le y \le \frac{1}{3} \qquad R_y = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$$* \; y = 2x - 8[\frac{x}{4}] \qquad R_y = ?$$

$0 \le u - [u] \le 1 \xrightarrow{u = \frac{x}{4}} 0 \le \frac{x}{4} - [\frac{x}{4}] \le 1 \xrightarrow{\times 8} 0 \le 2x - 8[\frac{x}{4}] \le 8$

$0 \le y \le 8 \qquad R_y = [0, 8)$

$$* \; y = \underbrace{4x - 4[x]}_{4(x-[x])} + 3 \qquad R_y = ?$$

$0 \le x - [x] \le 1 \xrightarrow{\times 4} 0 \le 4x - 4[x] \le 4 \xrightarrow{+c}$

$3 \le 4x - 4[x] + 3 \le 7 \qquad R_y = [3, 7)$

$$* \; y = \frac{4x}{1+x^2} \qquad R_y = ?$$

x هر مقداری می‌تواند باشد $\to x = \tan\alpha \Rightarrow y = \frac{4\tan\alpha}{1+(\tan\alpha)^2} = 2 \times \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 2\sin\alpha$

$-1 \le \sin u \le 1 \xrightarrow{\times 2} -2 \le 2\sin\alpha \le 2 \to R_y = [-2, 2]$

$$* \; y = \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \qquad R_y = ?$$

$y = \frac{2x(1-x^2)}{2\underbrace{(1+x^2)^2}_{(1+x^2)(1+x^2)}} \xrightarrow{x = \tan\alpha} y = \frac{1}{2}\underbrace{\sin(\alpha \cdot \cos 2\alpha)}_{\frac{1}{2}\sin 4\alpha} = \frac{1}{4}\sin \underset{a}{4\alpha} \qquad R_y = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

$-\frac{1}{4} \le \sin 4\alpha \le \frac{1}{4}$

$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\alpha + b\cos\alpha \le \sqrt{a^2+b^2}$

$$* \; y = 3\sin \underset{a}{2x} - 4\cos \underset{a}{2x} \qquad R_y = ?$$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \qquad -5 \le y \le 5 \qquad R = [-5, 5]$

$$* \; y = \frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x} \longrightarrow R_y \text{ شامل چند عدد صحیح است؟}$$

$y = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad -\sqrt{a^2+b^2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow R_y = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] - \{0\}$

$$* \; y = \underset{a}{6}|\sin x| - \underset{b}{8}|\cos x| \qquad R_y = ?$$

$\min\{a,b\} \le a|\sin\alpha| + b|\cos\alpha| \le \sqrt{a^2+b^2}$

$\min\{a,b\} \le y \le \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow -8 \le y \le 10 \qquad R_y = [6, 10]$

* $y=\left(\frac{3}{5}\sin\frac{2x}{5}-\frac{4}{5}\cos\frac{2x}{5}\right)^2$ $R_y=?$

$-\sqrt{25} \le 3\sin\frac{2x}{5}-4\cos\frac{2x}{5} \le \sqrt{25}$

$\frac{-5}{5} \le \frac{3\sin\frac{2x}{5}-4\cos\frac{2x}{5}}{5} \le \frac{5}{5}$

$0 \le \left(\frac{3\sin\frac{2x}{5}-4\cos\frac{2x}{5}}{5}\right)^2 \le 1$ $\xrightarrow{\times 25}$ $0 \le y \le 25$

$D_y=[0,25]$

* $y=\frac{2x-1}{x^2}$ $R_y=?$

$y=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ ← با صفر شدن مخرج مشکل پیش میاد

$(0,1]$
$(-\infty,0)$
$[1,+\infty)$
$(-\infty,1]$ ✓

* $f=\{(x,y) \mid y=\frac{x+10}{x}, x,y\in N\}$ $\xrightarrow{f}$ R_f چند عضو دارد؟

$y=1+\frac{10}{x}$

$x=1,2,5,10$ ← دوتا y

$y=2,3,6,11$

برد ۴ عضو متمایز دارد

$f=\{(2,10),(5,3),(10,2),(1,11)\}$

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف : ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

تساوی دو تابع:

دو تابع f و g را مساوی گوییم هرگاه

① $D_f=D_g$

② $x\in D_f$ داشته باشیم: $f(x)=f(g)$

مثال: کدام یک از توابع زیر با هم برابرند؟

۱) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ ، $g(x)=\tan x\cot x$

$\begin{cases} D_f=R \\ D_g=R-\{x=\frac{k\pi}{2}\} \end{cases}$

۲) $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}$ ، $g(x)=x-2$

$\begin{cases} D_f=R \\ D_g=R \end{cases}$ $\begin{cases} f(x)=|x-2| \\ g(x)=x-2 \end{cases}$

۳) ✓ $f(x)=0$ ، $g(x)=\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]$

$\begin{cases} D_f=R \\ D_g=R \end{cases}$ $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$

۴) $f(x)=|x|$ ، $g^2(x)=x^2$

حل: if $\begin{cases} f(x)=x^2-2 \\ g(x)=\sqrt{x^2+4x} \end{cases}$ $f(2)=2$ $g(2)=4$ $D_f=R$

$D_g: x^2+4x\ge 0$ $x^2+4x=0 \Rightarrow x=0,-4$

	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
x^2+4x	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_g=(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$

$(2f-g)(2)=?$ $2f(2)-g(2)=4-4=0$

$(f+g)(2)=?$ $f(2)+g(2)=2+4=6$

$\left(\frac{2f}{g}\right)(2)=?$ $\frac{2f(2)}{g(2)}=\frac{2\times 2}{4}=2$

$(f.g)(2)=?$ $f(2)\cdot g(2)=2\times 4=8$

$D_{2f-g}=?$ $D_f\cap D_g=(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$

$D_{f.g}=?$ $D_f\cap D_g=(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$

$D_{\frac{2f}{g}}=?$ $D_f\cap D_g-\{x\mid g=0\}=?$ $\Rightarrow (-\infty,-4]\cup[0,+\infty)-\{0,-4\}$

$=(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف : ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

مثال: $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\geq 0 \\ 2x & x<0 \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} 3 & x\geq -2 \\ 2x^2+3x & x<-2 \end{cases}$

$\longrightarrow (f+2g)(-1)=?$

$=f(-1)+2g(-1)$

$=-2+2(3)=4$

مثال: $f(x)=\sqrt{2x-1}$, $g(x)=\sqrt{3-x}$ $\Rightarrow D_{f\pm g}?\ D_f\cap D_g=[\frac{1}{2},3]$, $D_{f.g}?\ D_f\cap D_g=[\frac{1}{2},3]$

$D_f \Rightarrow 2x-1\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 1 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$

$D_g=3-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 3$

مثال: $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x}}$, $g(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow D_{f-g}?\ D_f\cap D_g=(0,2]$, $D_{\frac{f}{g}}?\ D_f\cap D_g-\{x\mid g=0\}=(0,2]-\{1\}=(0,1)\cup(1,2]$, $f-g$?

$D_f \rightarrow 4-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$, $x>0$ (مخرج کسر) $\Rightarrow 0<x\leq 2 \Rightarrow (0,2]$

$D_g \rightarrow x>0 \rightarrow D_g=(0,+\infty)$

$g=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

$f-g=\frac{\sqrt{4-x^2}-(x-1)}{\sqrt{x}}$

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.

مثال: $f=\{(1,2)\ (3,-1)\ (5,4)\ (\cancel{1},\cancel{3})\}$

$g=\{(2,1)\ (1,2)\ (0,4)\ (-1,2)\ (\cancel{-3},\cancel{5})\}$

$f+g=?$, $f-g=?$, $f.g=?$, $\frac{f}{g}=?$, $\frac{2f+g}{g}=?$, $f^2+2g=?$

نکته: اگر f و g به صورت زوج مرتب داده شده بودند برای انجام عملیات جبری ابتدا زوج مرتب های دارای مولفه‌های اول یکسان را شناسایی کرده و بقیه را از گروه خارج می‌کنیم و سپس عملیات جبری مد نظر طراح را روی مولفه‌های دوم اعمال می‌کنیم.

$f+g=\{(2,0)\ (-1,5)\ (4,5)\}$

سوال مهم: $f.g$ چند عضوی است؟ ۲ عضوی

$f-g=\{(2,2)\ (-1,1)\ (4,5)\}$

$f.g=\{(2,-1)\ (-1,4)\ (4,0)\}$

$\frac{f}{g}=\{(2,-1)\ (-1,\frac{3}{2})\}$?

$\frac{2f+g}{g}=\{(2,-1)\ (-1,4)\}$

$f^2=\{(2,1)\ (-1,9)\ (\cancel{4},\cancel{16})\}$

$g=\{(2,-1)\ (\cancel{2},\cancel{0})\ (0,4)\ (\cancel{5},\cancel{-3})\}$

$\Rightarrow f^2+2g=\{(2,-1)\ (-1,13)\}$

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.

مثال: $f=\{(-2,3),(2,5),(3,6)\}$
$g=\{(-2,0),(2,4),(4,2)\}$ $\longrightarrow \dfrac{f^2-3g}{g}$ ؟

$f^2=\{(-2,9)\ (2,25)\ \cancel{(3,36)}\}$ $\Rightarrow \dfrac{f^2-3g}{g}=\{(-2,\frac{13}{4})\}$

$g=\{(-2,0)\ (2,4)\ \cancel{(4,2)}\}$

مثال: $f=\{(1,2),(-1,4),\cancel{(0,0)}\}$
$g=\{(1,1),(-1,2),\cancel{(3,3)}\}$ $\longrightarrow$ برد $\dfrac{f}{2f-g}$ چند عضوی است؟

$\dfrac{f}{2f-g}=\{(1,\frac{2}{3})\ (-1,\frac{2}{3})\}$ $R=\{\frac{2}{3},\frac{2}{3}\}\longrightarrow$ تک عضوی است

مثال: $f=\{(3,2),(4,5),\cancel{(6,6)}\}$
$g=\{(3,3),(4,0),\cancel{(5,6)}\}$ $\longrightarrow$ برد $f+g$ چند عضوی است؟

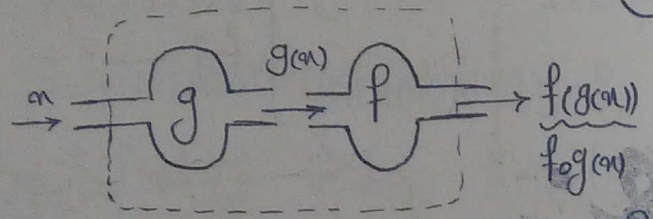
$f+g=\{(3,5)\ (4,5)\}$ $R_{f+g}=\{5,5\}$ تک عضوی

مثال: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x}{x-1} \\ g=\{(2,3),(-1,-1),(1,2)\} \end{cases}$ $\longrightarrow$ مجموع مقادیر (اعضای برد) $f+g$ ؟

$f=\{(2,4)\ (-1,1)\ \cancel{(1,0)}\}$

$f+g=\{(2,7)\ (-1,0)\}$ مجموع اعضای برد $=7+0=7$

ترکیب توابع:



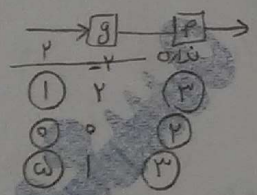
$fog(x)=f(g(x))\longrightarrow D_{fog(x)}=\{x\mid x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}$

$gof(x)=g(f(x))\longrightarrow D_{gof(x)}=\{x\mid x\in D_f,\ f(x)\in D_g\}$

مثال: if $f=\{(2,3),(1,3),(4,0),(0,2)\}$
$g=\{(2,-2),(1,2),(0,0),(5,1)\}$

$fog\longrightarrow ?$
$gof\longrightarrow ?$
$(f-g)o(f+g)\longrightarrow ?$

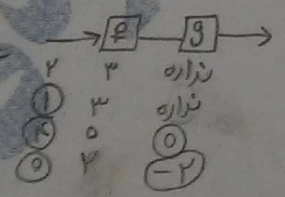
fog:



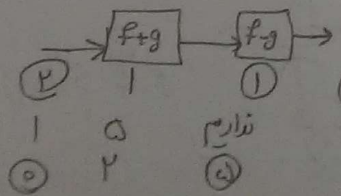
$fog=\{(1,3)(0,2)(5,3)\}$

برد fog شامل چند عضو است؟ ۲ عضو

gof:



$gof=\{(4,0)(0,-2)\}$



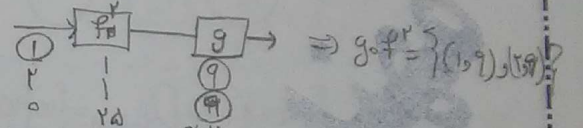
$f+g=\{(2,1)\ (1,5)\ (0,2)\}$

$f-g=\{(2,5)\ (1,1)\ (0,2)\}$

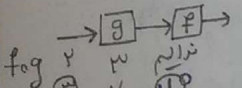
$(f-g)o(f+g)=\{(2,1)\ (0,5)\}$

مثال: $f=\{(1,1),(2,1),(0,5)\}$ ، $g=\{(2,3),(3,2),(1,9)\}$ $\Big\}$ $g\circ f^2 \to ?$ ، $f\circ g \to ?$

$f^2=\{(1,1),(2,1)(0,25)\}$



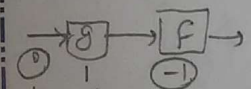
$\Rightarrow g\circ f^2=\{(1,9),(2,9)\}$



$\Rightarrow f\circ g=\{(3,1)\}$

مثال: $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ ، $g=\{(0,1),(1,2),(3,4),(5,3)\}$ $\Big\}$ $f\circ g \to ?$

$f\circ g=\{(0,-1)(5,3)(3,2)\}$



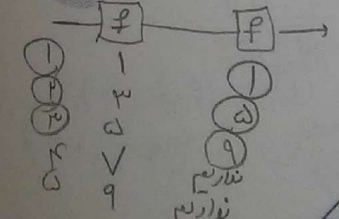
مثال: $A=\{1,2,3,4,5\}$

$f=\{(x,2x-1) \mid x\in A\}$

$f\circ f(x)$ چند عضو دوتایی دارد؟

$f=\{(1,1),(2,3)(3,5)(4,7),(5,9)\}$

$f\circ f=\{(1,1)(2,5)(3,9)\}$



مثال: $f(x)=x+\sqrt{x}$ ، $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ ، $g(f(a))=5 \Rightarrow f(a)=6$ $\Big\}$ $a=?$

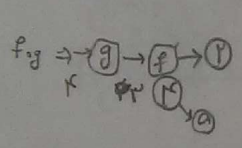
$f(a)=a+\sqrt{a}=6 \Rightarrow \boxed{a=4}$

مثال: $f=\{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$ ، $g=\{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$ $\xrightarrow[(4,1)\in g\circ f]{(4,2)\in f\circ g}$ $(a,b)=?$

$(a,b)=(4,b)$

$f\circ g \Rightarrow$ ۴ $\to g \to$ ۳ $\to f \to$ ۴ $\to$ ۲ ، ۵

۴ $\to f \to$ ۵ $\to g \to$ ۵ $\to$ ۱ ، $b=6$



انواع مسائل ضابطه‌ای ترکیب توابع:

	f	g	$f\circ g$
نوع اول	✓	✓	?
نوع دوم	?	✓	✓
نوع سوم	✓	?	✓

روش حل: به جای x در $f(x)$ ، $g(x)$ را قرار می‌دهیم

روش حل: $g(x)$ را مساوی t در نظر می‌گیریم و x را برحسب t محاسبه نموده و $f(t)$ را تشکیل می‌دهیم

روش حل: $f(x)$ را برحسب دومی $g(x)$ نوشته و آن را مساوی $f\circ g(x)$ قرار می‌دهیم و از دل آن $g(x)$ را بدست می‌آوریم

مثال های نوع اول:

مثال: $f(x)=|x|$ ، $g(x)=x^2+2x+1$ $\Big\}$ $fog(1-\sqrt{2})-gof(1-\sqrt{2})=?$ $=6-4\sqrt{2}-2=$

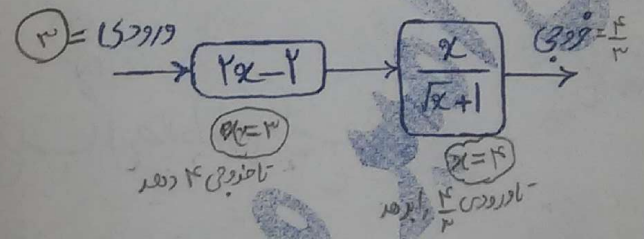
$g(x)=(x+1)^2$

$gof_{(1-\sqrt{2})}=g(\underbrace{f(1-\sqrt{2})}_{\sqrt{2}-1})=g(\sqrt{2}-1)=2$

$fog_{(1-\sqrt{2})}=f(\underbrace{g(1-\sqrt{2})}_{(2-\sqrt{2})^2})=f(6-4\sqrt{2})=\boxed{6-4\sqrt{2}}$

$4-4\sqrt{2}+2 \Rightarrow 6-4\sqrt{2}$

مثال: اگر خروجی از ماشین شکل زیر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟



مثال: اگر $f(x)=(2x-3)^2$ و $g(x)=x+2$ باشند، نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع اند؟

$f(x)=(2x-3)^2$

$fog_{(x)}=f(g(x))=(2(x+2)-3)^2=(2x+1)^2$

$f(x)=fog_{(x)} \Rightarrow (2x-3)^2=(2x+1)^2$

* طرفین از ۲ عبارت با توان ۲ باشند برای حل معادله $(2x-3)$ را به $\pm(2x+1)$ قرار می دهیم.

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3=2x+1 \Rightarrow \text{غیرممکن} \\ 2x-3=-2x-1 \Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow \text{طول نقطه قطع} \end{cases}$

مثال: اگر $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$ باشند، مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار گیرد برابر کدام بازه است؟

$gof_{(x)}=g(f(x))=-\frac{1}{2}(x^2+3x)+2=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2>0$ تا بالای محور قرار بگیرد

$\xrightarrow{\times 2} -x^2-3x+4>0 \rightarrow -x^2-3x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$

x		-4		1	
$-x^2-3x+4$	$-$	0	$+$	0	$-$

$-4<x<1 \Rightarrow$ جواب $=(-4,1)$

مثال:

if $f(x)=2x+2a$ ، $g(x)=x^2+bx+c$ ، $fog(x)=2x^2+x+1$ $\Big\}$ $a+b+c=?$

$fog(x)=f((g(x)))=2(x^2+bx+c)+2a=2x^2+2bx+2c+2a$

$fog=2x^2+2bx+2c+2a$

$fog=2x^2+x+1$

$2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$ ، $2c+2a=1 \Rightarrow a+c=\frac{1}{2}$

$a+b+c=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

مثال: if $f(x)=x^2(2-x)^2 \rightarrow f(\underbrace{1+x}_{A})-f(\underbrace{1-x}_{B})=?$

$A=f(1+x)=(1+x)^2(1-x)^2=(1-x^2)^2$

$B=f(1-x)=(1-x)^2(1+x)^2=(1-x^2)^2$

$A=B \Rightarrow A-B=0$

مثال: if $f(x)=\frac{x}{1+x^2} \longrightarrow f(\tan x)=?$ (بازای $x=\frac{\pi}{12}$ کدام)

$f(\tan x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{2\tan x}{2(1+\tan^2 x)}=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

مثال: if $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+4} & x>3 \\ 2x+3 & x\le 3 \end{cases} \rightarrow f(f(5))+f(f(1))=?$

$f(1)=5$, $f(5)=2$, $f(2)=7$, $f(7)=9$

$\Rightarrow f(f(5))+f(f(-1))=7+2=9$

مثال: if $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x<0 \\ \frac{x}{2}+2 & x\ge 0 \end{cases} \rightarrow f(2f(1-\sqrt{2}))=?$

$f(1-\sqrt{2})=0 \Rightarrow 2f(1)=2 \Rightarrow f(2)=2+2=4$

مثال: if $f(x)=\frac{x}{x-1} \longrightarrow f(x^2)-2f(x)+1=?$

$\frac{1}{1-x^2}$ $\quad$ $\frac{2x}{x^2-1}$ $\quad$ $\frac{2x+1}{1-x^2}$ ✓ $\quad$ $\frac{2x-1}{x^2-1}$

روش ①: $\frac{x^2}{x^2-1}-2\left(\frac{x}{x-1}\right)+1=\frac{x^2-2x^2+2x+x-1}{x^2-1}=\frac{2x+1}{1-x^2}$

روش ②: $x=2 \Rightarrow f(2)=2 \longrightarrow f(2)-2f(2)+1=2-4+1=-1=\frac{-3}{3}$

نزدیک ترین عدد است که اگر $x=2$ را به عنی بدهم خروجی $\frac{-3}{3}$ را بدهد.

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

مثال‌های نوع دوم:

مثال: if $f(\frac{t}{x-3})=x^2-4x+5$, $f(1-x)=?$

$x-3=t \Rightarrow x=t+3$

$f(t)=(t+3)^2-4(t+3)+5=t^2+6t+9-4t-12+5=t^2+2t+2=(t+1)^2+1$

$t=x-1 \Rightarrow f(x-1)=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$

$f(1-x)=x^2+2x+2$

روش ①: خروجی $f(x-3)$ دوتا x دارد $\Rightarrow x=2$ دوتا x $\Rightarrow x-3=1-x \rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$ روش ②

مثال: if $f\circ g(x)=4(x^2-4x+5)$, $g(x)=2x-3$, $f^{-1}(x)=?$

$f(x-3)=f^{-1}(x)$

$x=0 \rightarrow \begin{cases} g(0)=-3 \\ f(g(0))=20 \end{cases} \Rightarrow f(-3)=20$

سؤال شبیه‌ای هست که اگر $x=-3$ دنبالمیم خروجی ۲۰ بدهد.

x^2-4x+3
x^2-4x+5
$\sqrt{x^2-4x+5}$
x^2-4x+3

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

مثال: اگر $f(x)=2x+3$ و $g(\underbrace{f(x)}_{2x+3})=8x^2+32x+20$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f\circ g$ کدام است؟

$2x+3=t \Rightarrow x=\frac{t-3}{2} \rightsquigarrow g(t)=8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2+32\left(\frac{t-3}{2}\right)$

$\Rightarrow g(t)=2t^2-t+5$

$g(x)=2x^2-5+5$

$f\circ g=f(g(x))=2(2x^2-x+5)+3$
$=4x^2-2x+13$

مثال:
$$\left.\begin{array}{l} g(x)=2x-1 \\ (f\circ g)(x)=\frac{x}{x-3} \end{array}\right\} f(3)=?$$

$f(\underbrace{g(x)}_{3})=\frac{x}{x-3} \Rightarrow 2x-1=3 \Rightarrow x=2$

$f(g(2))=\frac{2}{-1}=-2$

مثال:
$$\left.\begin{array}{l} f(\sqrt{x})=2x+1 \\ g\left(\frac{x+8}{x}\right)=x-3 \end{array}\right\} g\circ \underbrace{f(2)}_{g(f(2))}=?$$

$f(2)=2(4)+1=9$

$g(9)=g\left(\frac{1+8}{1}\right)=-2$ جواب

مثال:
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-1 \\ g\circ f(x)=\frac{x^2+3}{2x^2-1} \end{array}\right\} g(3)=?$$

$g(\underbrace{f(x)}_{3}) \Rightarrow x^2-1=3 \Rightarrow x^2=4$

$g(3)=\frac{7}{7}=1$

مثال: $f\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)=\frac{x^2}{x^4+x^2+1} \longrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=?$

$f\left(\frac{1}{3}\right) \xrightarrow[\text{با بیرون}]{x=1} = f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

مثال: $f(\overbrace{\sqrt{x}+1}^{t})=x+2\sqrt{x}+2 \longrightarrow f(\sqrt{2})=?$

$f(t)=(\sqrt{x}+1)^2+1 \Rightarrow f(t)=t^2+1 \Rightarrow f(\sqrt{2})=\sqrt{2}^2+1=3$

مثال: $f(\overbrace{x^2+x}^{t})=x^4+2x^3+x^2 \longrightarrow f(\sqrt{3})=?$

$f(t)=(x^2+x)^2 \Rightarrow f(t)=t^2=\sqrt{3}^2=3$

مثال: $f\left(\overbrace{\frac{x-1}{x+1}}^{t}\right)=\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^2 \longrightarrow f(2)=?$

$f(t)=t^2 \Rightarrow f(2)=2^2=4$

مثال: $f\left(\overbrace{1-\frac{1}{x}}^{t}\right)=x^2+\frac{1}{x^2} \longrightarrow \begin{cases} f(5)=? \\ f(x)=? \end{cases}$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

$f(t)=t^2+2 \Rightarrow f(5)=27$

$f(x)=x^2+2$

مثال‌های نوع سوم:

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x+1}{x-1} \\ fog(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} g(1)=? \quad g(1)=5 \\ g(x)=? \quad g(x)=2x^2+3 \end{array}$$

$f(g(x))$

$$f(g(x))=\frac{g+1}{g-1}=\frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{g(x^2+1)-g(x^2-2)}{g(x^2)-g} = \frac{-x^2-2}{g(x^2)+2(g)}$$

$$\Rightarrow -g=\frac{-x^2-x^2-2-1}{} \Rightarrow g=2x^2+3$$

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-4 \\ (fog)(x)=x^4-4x^2 \end{array}\right\} g(x)=?\pm(x^2-2)$$

$$f(g(x))=g^2-4=x^4-4x^2 \longrightarrow g^2=x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2$$

$$g=\pm(x^2-2)$$

دامنه‌ی ترکیب توابع:

مثال: if $\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x-1} \\ g(x)=\sqrt{3-x} \end{array}\right\}$ دامنه و ضابطه‌ی $fog(x)$ ؟

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{\sqrt{3-x}-1}$$

دامنه: $3-x\geq 0 \longrightarrow x\leq 3$

$\sqrt{3-x}-1\geq 0 \longrightarrow \sqrt{3-x}\geq 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3-x\geq 1 \Rightarrow x\leq 2$

$x\leq 2$

دامنه fog

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.

مثال:

$$f(x)\Rightarrow\begin{cases} D_f:[-2,4] \\ R_f:[-1,2] \end{cases}$$

$$y=2f(\underbrace{2x+1}_{u(x)})+2 \longrightarrow \begin{cases} D_y=? \\ R_y=? \end{cases}$$

$-2\leq 2x+1\leq 4 \xrightarrow{-1} -3\leq 2x\leq 3 \xrightarrow{\div 2} -1\leq x\leq \frac{3}{2}$

$D_y=[-1,\frac{3}{2}]$

$R_y=2R_f+2=2[-1,2]+2=[-2,4]+2=[0,6]$

مثال: if $f(x)=\sqrt{2x-x^2} \longrightarrow D_{f(2-x)}=?$

$2x-x^2\geq 0 \Rightarrow 2x-x^2=0 \Rightarrow x(2-x)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

x		0		2	
$2-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$D_f=[0,2]$

$0\leq 2-x\leq 2 \Rightarrow -2\leq -x\leq 0 \Rightarrow -1\leq 1-x\leq 1$

$D_{f(2-x)}=[-1,1] \Rightarrow -1\leq x\leq 3$

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.

تابع یک به یک :

روش های تشخیص:

① ازروی زوج مرتب: هیچ دو زوج مرتبی نداشته باشیم که دارای مولفه های دوم یکسان باشند مگر اینکه مولفه های اول آن ها نیز یکسان باشند.

مثال = {(۱و۲) (۲و۳) (۳و۴) (۴و۵) (۶و۵)} ⇒ تابع است ولی یک به یک نیست.

مثال: $f=\{(-2,2),(m,3),(-1,3),(2m,a)\}$

if تابع f یک به یک باشد $\longrightarrow a=?$

$2m=-2 \Rightarrow -2=-2 \Rightarrow a=2$ ، $m=-1$

مثال: $f=\{(-3,1),(a+2,3),(-3,a^2+1),(m^2-5,3)\}$

if f = یک تابع یک به یک باشد

$m=?$

$a^2+1=1 \Rightarrow a=0$

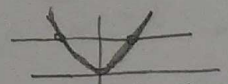
$a+2=m^2-5 \Rightarrow 2=m^2-5 \Rightarrow m=\pm 3$

هردو قابل قبول

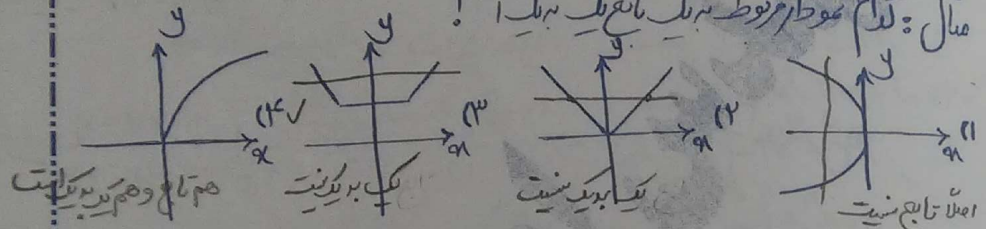
کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

② ازروی منحنی یا نمودار مختصاتی: هرخطی به موازات محور x نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: $f(x)=x^2$



مثال: کدام نمودار مربوط به یک تابع یک به یک است؟

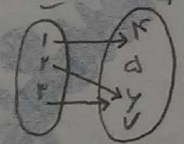


③ ازروی نمودار ون:

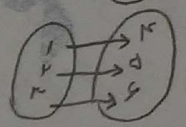
در مورد تابع بودن ← از هر عضو مجموعه ی اول باید دقیقاً یک پیکان خارج شود

در مورد یک به یک بودن به هر عضو مجموعه ی دوم حداکثر باید یک پیکان وارد شود.

مثال:



تابع است ولی یک به یک نیست



هم تابع و هم یک به یک است

④ ازروی ضابطه: به ازای هیچ دو x حداکثر باید یک x داشته باشیم تا پیش رفت.

یک ضابطه ای: باز

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

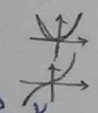
مثال: یک به یک بودن یا غیر یک به یک بودن توابع زیر را مورد بررسی قرار دهید؟

* $y^5+3x^2-5x+2=0 \xrightarrow{y=0} 3x^2-5x+2=0 \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$ یک به یک نیست

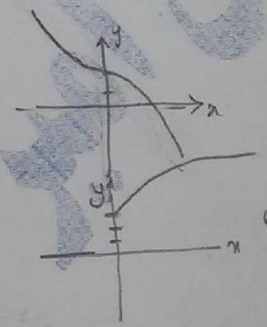
* $y=\frac{|x|-2}{|x|+3}$ $\quad y=0 \to |x|-2=0 \Rightarrow |x|=2 \Rightarrow x=\pm 2$ یک به یک نیست

* $y=x^3-9x$ $\quad y=0 \Rightarrow x^3-9x=0 \Rightarrow x(x^2-9)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 3 \end{cases}$ یک به یک نیست

نکته: $y=x^n=\begin{cases} \text{زوج} \\ \text{فرد} \end{cases}$



* $y=-x^5+2$ یک به یک است



* $y=\sqrt{x}+3$ تابع یک به یک است

* $y=[x]-2 \xrightarrow{y=0} [x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \quad 2\leq x<3$

بیشمار x داریم پس یک به یک نیست

* $y=\sin x \xrightarrow{y=0} \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$

بیشمار x حاصل شد یک به یک نیست

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.

نکته: اگر f یک تابع پیوسته باشد و $f'>0$ یا $f'<0$ باشد آنگاه تابع f یک به یک است.

مثال: کدام تابع زیر یک به یک نیست؟

۱) $y=x^5+3x+10$ ← پیوسته ← تابع یک به یک است $\quad y'=5x^4+3>0$

۲) $y=2x+\sin x$ ← تابع یک به یک است $\quad y'=2+\underbrace{\cos x}_{\text{بین ۱ و } -1}>0$

۳) $y=3x^2-12x+10$ ✓ ← تابع غیر یک به یک است $\quad y'=6x-12=0$

x		2	
6x	−		+

۴) $y=2x^3+6x$ ← یک تابع یک به یک است $\quad y'=6x^2+2>0$

مثال: کدام تابع یک به یک می باشد؟

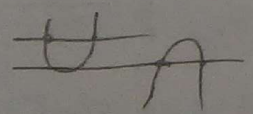
۱) $y=|x^2-1|$ ← $y=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

۲) $y=|x|+2$ ← $y=4 \Rightarrow |x|=2 \Rightarrow x=\pm 2$

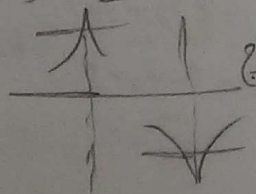
۳) $y=2x^3-6x$ ← $y=0 \Rightarrow 2x^3-6x \Rightarrow x(2x^2-6)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

۴) $y=x^3+x-1$ ✓ $\quad y'=3x^2+1>0$ یک به یک است

نکته: اگر تابع f دارای حداقل یک ریشه مرتبه زوج در صورت یا مخرج کسر باشد قطعاً غیر یک به یک خواهد بود.



ریشه زوج در صورت



ریشه زوج تو مخرج

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.

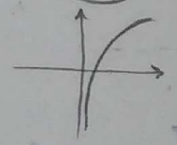
مثال: کدام تابع یک به یک می باشد؟

۱) $y^3=|x|-4$ ← $y=0 \to |x|-4=0 \Rightarrow |x|=4 \Rightarrow x=\pm 4$

۲) $y=\frac{(x-1)^4}{x^2+5}$ ← $x=1$ ← $y=0$ ⇐ ریشه مرتبه ۴ زوج

۳) $y=\frac{x^2+6}{(x-2)^2}$ ← $x=2$ ← ریشه مرتبه ۲ زوج

۴) $y=\log_5 x$ ✓



چند ضابطه ای: ① برای یک به یک بودن اولاً باید همه ی ضابطه ها یک به یک باشند ثانیاً اشتراک بین برد ضابطه ای تهی باشد در این صورت تابع یک به یک است.

مثال: $y=\begin{cases} 3x+5 & x\geq 0 \\ x+4 & x<0 \end{cases}$ $R_1=[5,+\infty)$ $R_2=(-\infty,4)$ $R_1\cap R_2=\phi$

مشتق $3>0$ ، مشتق $1>0$

کل تابع یک به یک خواهد بود

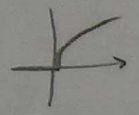
مثال: $y=\begin{cases} x^2+2 & x\geq 1 \Rightarrow y'=2x>0 \\ x+1 & x<1 \Rightarrow y'=1>0 \end{cases}$ هر دو یک به یک اند

$R_1=[3,+\infty)$

$R_2=(-\infty,2)$ $\Rightarrow R_1\cap R_2=\phi$

تابع یک به یک می باشد

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 0 \\ 2+x & x<0 \end{cases}$ چگونه است و $f(f(-\frac{2}{9}))$ کدام است؟

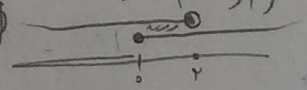
$\sqrt{x}=$  یک به یک

$2+x \Rightarrow y'=1>0$ یک به یک

$R_1=[0,+\infty)$

$R_2=(-\infty,2)$

$R_1\cap R_2\neq\phi$



پس غیر یک به یک است

یک به یک $-\frac{4}{3}$

یک به یک $-\frac{2}{3}$

✓ غیر یک به یک $-\frac{4}{3}$

غیر یک به یک $-\frac{2}{3}$

$f(-\frac{2}{9})=\frac{16}{19} \Rightarrow f(\frac{16}{9})=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$

تابع وارون یا تابع معکوس: f^{-1}

① از نگاه زوج مرتب = اگر در تمامی زوج مرتب های مربوط به تابع f جای مولفه های اول و دوم را با هم عوض کنیم f^{-1} (یعنی معکوس یا وارون f) حاصل می شود.

مثال: $f=\{(1,3)(2,5),(3,6),(4,7)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(3,1)(5,2)(6,3)(7,4)\}$

نتیجه گیری: دامنه تابع f با برد تابع معکوسش برابر است و برد تابع f دامنه تابع f^{-1} است.

$\begin{cases} D_f=R_{f^{-1}} \\ R_f=D_{f^{-1}} \end{cases} \Rightarrow (a,b)\in f \longleftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

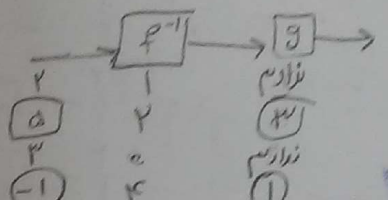
مثال:

$f=\{(1,2),(2,5),(0,3),(4,-1)\}$

$g=\{(2,3),(-1,4),(4,1),(3,0)\}$

$g\circ f^{-1}$ ↓ ?

$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(3,0),(-1,4)\}$



$\boxed{f^{-1}} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow$

۲	۱	ندارد
$\boxed{5}$	۲	$\boxed{3}$
۳	۰	ندارد
$\boxed{-1}$	۴	$\boxed{1}$

$g\circ f^{-1}=\{(5,3),(-1,1)\}$

روش بدست آوردن ضابطه‌ی تابع معکوس:

کافیست x را برحسب y بدست آوریم و سپس جای x و y را باهم عوض کنیم.

مثال: ضابطه‌ی تابع معکوس را در هر مورد بدست آورید؟

① $y=x^2-4x+5 \quad x\geq 2$

مربع کامل می‌کنیم $=(x-2)^2-4+5 \Rightarrow (x-2)^2+1=y \Rightarrow y-1=(x-2)^2$

$\xrightarrow{\text{جذر}} x-2=\pm\sqrt{y-1} \Rightarrow x=\pm\sqrt{y-1}+2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x-1}+2$

$y\geq 2 \Rightarrow +\sqrt{x-1}+2=y$

② $y=x^3+3x^2+3x+2$ $\quad 1+1$

$y=(x+1)^3+1 \Rightarrow y-1=(x+1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1}=x+1$

$x=\sqrt[3]{y-1}-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}+1$

③ $y=\dfrac{2^x+1}{2^x-1} \rightarrow y2^x-y=2^x+1$

$\Rightarrow y2^x-2^x=y+1 \Rightarrow 2^x(y-1)=y+1$

$\Rightarrow 2^x=\dfrac{y+1}{y-1} \xrightarrow[\log_2 \text{ بگیریم}]{\text{از طرفین}} \log_2 2^x=\log_2\dfrac{y+1}{y-1} \Rightarrow x=\log_2\dfrac{y+1}{y-1}$

$y=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}$

مثال: if $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \longrightarrow f^{-1}(\sin x)=?$

$y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2=\dfrac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow y^2+y^2x^2=x^2$

$y^2=x^2-y^2x^2 \Rightarrow y^2=x^2(1-y^2) \Rightarrow x^2=\dfrac{y^2}{1-y^2} \Rightarrow x=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f^{-1}(\sin x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\dfrac{\sin x}{|\cos x|}$

$\tan x$
$\cot x$
$\dfrac{|\cos x|}{\sin x}$
$\dfrac{\sin x}{|\cos x|}$ ✓

مثال: ضابطه‌ی معکوس تابع $y=2-\sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

$x=1 \Rightarrow (1,2)\in f \Rightarrow (2,1)\in f^{-1}$
$y=2 \Rightarrow$

کدام گزینه ورودی ۲ رو برای خروجی ① را می‌دهد

$y=x^2-4x+5 \quad x\leq 2$ ✓

$y=-x^2+4x-5 \quad x\leq 2$

$y=x^2-4x+5 \quad x\geq 1$

$y=-x^2+4x-5 \quad x\geq 1$

$D_f=D_{f^{-1}}$

$(-\infty,2] \xrightarrow{\text{دو مقدار معکوس}}$

$y\leq 2 \qquad x\leq 2$

مثال: اگر تابع $y=x^3+ax$ از $(1,2)$ بگذرد، معکوس آن از کدام نقطه خواهد گذشت؟

$x=1, y=2 \Rightarrow 2=1+a \Rightarrow a=1$

ضابطه تابع اصلی $= y=x^3+x$

$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

$\Rightarrow (1,2)\in f^{-1} \Rightarrow (2,10)\in f$

(۲و۱۰)
(۱۰و۲) ✓
(-۱و۰)
(-۲و۱۰)

برازای دومین ۲ خروجی ۱۰ باید بگیریم.

مثال: تابع معکوس تابع $y=x+4+4\sqrt{x}$ کدام است؟

$y=(\sqrt{x}+2)^2$

$x\to 1 \longrightarrow y=9$

$(1,9)\in f \Rightarrow (9,1)\in f^{-1}$

$y=x-2\sqrt{x}$
$y=x+4+4\sqrt{x}$
$y=x+4-4\sqrt{x}$ ✓
$y=x+2\sqrt{x}$

مثال: $f(x)=-x+\sqrt{-2x} \longrightarrow f^{-1}(4)=?$

دومین ۴ به بیرون گذرم ① و بعد

$(4,?)\in f^{-1} \Leftrightarrow (?,4)\in f$

$\downarrow$

$x=-2 \Rightarrow y=4$

تعریف نشده
-5
-2 ✓
-8

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

مثال: ضابطه‌ی وارون تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

$x=1, y=\frac{1}{2} \Rightarrow (1,\frac{1}{2})\in f \Leftrightarrow (\frac{1}{2},1)\in f^{-1}$

$\downarrow$

$|\frac{1}{2}|<1 \Rightarrow |x|<1$

بدازای $\frac{1}{2}$ باید ① را انتخاب کنیم

$|x|<1$ ✓ $\quad y=\frac{x}{1-|x|}$

$|x|>1$ $\quad y=\frac{1-|x|}{x}$

$|x|>1$ $\quad y=\frac{x}{|x|-1}$

$|x|<1$ $\quad y=\frac{|x|-1}{x}$

مثال: $f(x)=2x+3$, $(f\circ g)^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$, $g(x)=?$

$y=\frac{x-1}{2} \Rightarrow x=2y+1 \Rightarrow y=2x+1$

$\downarrow$

y معکوس است که همان معکوس $(f\circ g)^{-1}$ یعنی $g\circ f$ است

$f(g(x))=2(g(x))+3$

$2g(x)+3=4x+1 \Rightarrow g(x)=2x-1$

کپی و استفاده از مطالب و تکنیکها شرعاً حرام است و پیگرد قانونی دارد.
مشاوره با مولف: ۰۹۱۲۱۰۰۹۶۵۶

مثال: در تابع $y=\frac{ax+1}{x-c}$ a و c را به گونه‌ای تعیین کنید که این تابع وارون خود باشد؟

نکته: در توابع هموگرافیک برای اینکه تابع معکوس با تابع اصلی یکی باشد (یا خود وارون باشد) $(f=f^{-1})$ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ باید $a+d=0$

$a+(-c)=0 \Rightarrow a=c$

مثال: اگر $f(x)=\frac{2x-1}{3x+a}$ و $f\circ f(x)=x$ باشد، مقدار a کدام است؟

نکته:

$f\circ f^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=x \quad x\in D_{f^{-1}} \quad x\in R_f$

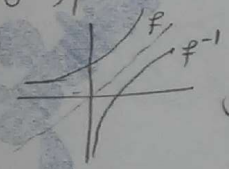
$f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(f(x))=x \quad x\in D_f \quad x\in R_{f^{-1}}$

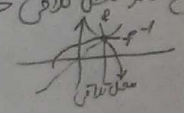
* ترکیب یک تابع با معکوس خودش تابع همانی می‌باشد.

مثال: اگر $f(x)=x^3-3x \quad x\geq 1$ نمودارهای دو تابع f و f^{-1} با کدام طول متقاطعند؟

نکته: نمودار ۲ تابع f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع های اول و سوم $(y=x)$ قرینه است.

نکته: اگر f یک تابع صعودی باشند و f و f^{-1} همدیگر را قطع کنند محل تلاقی حتماً روی خط $y=x$ است





$f(x)=x^3-3x$
$\downarrow$
$y=x$

$\rightarrow x^3-3x=x \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$

نقطه قطع $=(2,2)$ جواب عدد $+2$

$f\circ f=x$
$f\circ f^{-1}=x$ پس f همان f^{-1} است $\Rightarrow f(x)=\frac{2x-1}{3x+a} \Rightarrow a+2=0 \Rightarrow a=-2$

ویژه‌ی رشته‌ی ریاضی:

تابع زوج - تابع فرد:

نکات:

* تابع زوج $\longrightarrow f(-x)=f(x) \longrightarrow$ محور y ها محور تقارن توابع زوج است
تابع فرد $\longrightarrow f(-x)=-f(x) \longrightarrow$ مبداء مختصات مرکز تقارن توابع فرد است

* تابع ثابت $y=c\neq 0$ زوج است ولی تابع ثابت $y=0$ هم زوج است و هم فرد است.

* تابع چند جمله‌ای فقط در صورتی فرد است که تمام جملات آن از درجه‌ی فرد باشد و فقط در صورتی زوج است که تمام جملات آن از درجه‌ی زوج باشد.

* تابع $f(x)+f(-x)$ زوج است. تابع $f(x)-f(-x)$ فرد است.

* اگر f فرد و معکوس پذیر باشد f^{-1} نیز فرد است.

* هر تابع دلخواه با دامنه‌ی متقارن را می‌توان به صورت یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت:

$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{زوج}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{فرد}}$$

مثال

مثال: اگر تابع $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}(x+1) & x\geq 0\\ f(x) & x<0\end{cases}$ زوج باشد، آن گاه $f(-2)$ کدام است؟

$g(-x)=g(x)$

$x=2 \rightarrow g(-2)=g(2) \Rightarrow f(-2)=\sqrt{2}(2+1) \Rightarrow f(-2)=3\sqrt{2}$

مثال: به ازای کدام مقدار a ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{ax} & x<0\end{cases}$ یک تابع فرد است؟

$x=-2 \Rightarrow f(-2)=-f(2) \Rightarrow -\sqrt{a(-2)}=-2\sqrt{2}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} -2a=8 \Rightarrow a=-4$

مثال:

$\left.\begin{matrix} f(x) \text{ زوج} \\ g(x) \text{ فرد}\end{matrix}\right\} \longrightarrow g\circ f(x) \text{ و } f\circ g(x)$ ؟

$f\circ g_x = f(g(x)) \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{منفی تزریق}} f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$ زوج شد

$g\circ f = g(f(x)) \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{منفی تزریق}} = g(-f(x)) = g(f(x))$ زوج است

جمع بندی رسم نمودار:

$y=f(x)$

$y=f(x+a) \longrightarrow$ انتقال افقی به چپ

$y=f(x-a) \longrightarrow$ انتقال افقی به راست

$y=f(x)+a \longrightarrow$ انتقال عمودی به بالا

$y=f(x)-a \longrightarrow$ انتقال عمودی به پایین

$y=f(ax) \longrightarrow$ انبساط و انقباض افقی

$y=af(x) \longrightarrow$ انبساط و انقباض عمودی

بررسی کامل تر در DVDهای قدر مطلق و جزء صحیح

«پایان»

موفق باشید

امیر مسعودی

منتظر DVDهای قدر مطلق و جزء صحیح باشید.

۰۹۱۲ ۱۹۶ ۵۷۰۲